



第4回目(入門復習編)

- 協力ゲーム
- 交渉ゲーム

ゲーム理論

火曜 2限 2011.05.10

高木英至

1

「古典的」ゲーム理論の2部門

- ▶ 非協力ゲーム(noncooperative games)
 - ▶ プレイヤーの戦略的な選択を焦点にする
 - ▶ プレイヤー間の調整はないと仮定
 - ▶ 通常、戦略の組で結果を表現する
 - ▶ 通常、ゲーム理論として連想されるのはこの非協力ゲームである
- ▶ 協力ゲーム(cooperative games)
 - ▶ プレイヤーが協力する、と仮定
 - ▶ プレイヤー間で何が合意できるか?
 - ▶ 提携(coalition)
 - ▶ 通常、利得の組で結果を表現する

▶ 2

協力ゲームの2つの場合

- ▶ 譲渡可能な利得を前提とするゲーム
 - ▶ 手附(sidepayment)を前提にするゲーム
 - ▶ 例：利得＝お金
 - ▶ 大ざっぱ
 - ▶ が、この授業の範囲では、利得は譲渡可能と考える
- ▶ 譲渡可能な利得を前提としないゲーム
 - ▶ 手附を前提としないゲーム
 - ▶ 例：利得＝心理的満足、本来の効用
 - ▶ より厳密な議論になる

▶ 3

例10.1 ベンチャー企業の起業

- ▶ A、B、Cがベンチャー企業を作ろうと思う
 - ▶ 3人別々に起業した場合：A 60万円、B 40万円、C 20万円
 - ▶ 2人共同の起業の場合：ABペア 200万円、ACペア 150万円、BCペア 100万円
 - ▶ 3人での起業：240万円
- ▶ 問題
 - ▶ 誰と誰のベンチャー企業ができるか?
 - ▶ 収益をどのように分配するか?
 - ▶ 予定収益の分配合意

▶ 4

- ▶ プレイヤー集合 $N=\{A,B,C\}$
- ▶ 可能な提携は：
 - ▶ 1人提携： $\{A\}, \{B\}, \{C\}$
 - ▶ 2人提携： $\{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}$
 - ▶ 3人提携： $\{A,B,C\}$
- ▶ 特性関数 v
 - ▶ $v(\{A\})=60, v(\{B\})=40, v(\{C\})=20$
 - ▶ $v(\{A,B\})=200, v(\{A,C\})=150, v(\{B,C\})=100$
 - ▶ $v(\{A,B,C\})=240$
- ▶ 提携形 n 人ゲーム、特性関数形 n 人ゲーム
 - ▶ (N, v)
- ▶ 譲渡可能利得を前提（手附を前提とする）

▶ 5

優加法性(superadditivity)

- ▶ 任意の提携 $S, T(S \cap T = \emptyset)$ について

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$
 なら、特性関数 v は優加的

- ▶ $v(\{A\}) + v(\{B\}) = 100 < v(\{A,B\}) = 200$
- ▶ $v(\{B\}) + v(\{C\}) = 60 < v(\{B,C\}) = 100$
- ▶ $v(\{A\}) + v(\{C\}) = 80 < v(\{A,C\}) = 150$
- ▶ $v(\{A,B\}) + v(\{C\}) = 220 < v(\{A,B,C\}) = 240$
- ▶ $v(\{B,C\}) + v(\{A\}) = 160 < v(\{A,B,C\}) = 240$
- ▶ $v(\{A,C\}) + v(\{B\}) = 190 < v(\{A,B,C\}) = 240$

▶ 6

パレート優位、支配

- ▶ 利得ベクトル $x=(x_1, \dots, x_n)$ が**実現可能**とは
 - ▶ $\sum x_i \leq v(N)$
- ▶ x, y : 実現可能な2つの利得ベクトル
 - ▶ x が y より**パレート優位**、ないし、 x が y を提携 N において**支配する**、とは
 - ▶ すべての $i \in N$ に対して $x_i \geq y_i$
- ▶ **定義10.1** 提携形 n 人ゲームの実現可能な利得ベクトル x が**パレート最適**であるとは、 x よりパレート優位な他の実現可能な利得分配 y が存在しないことである
- ▶ 優加法的游戏の場合、 $x=(x_1, \dots, x_n)$ がパレート最適であるための必要十分条件は
 - ▶ $x_1 + \dots + x_n = v(N)$

▶ 7

個人合理性

- ▶ **定義10.2** 提携形 n 人ゲームの実現可能な利得ベクトル x が**個人合理性**を満たすとは、すべての $i \in N$ に対して $x_i \geq v(\{i\})$
- ▶ ゲームの**配分**(imputation)
 - ▶ パレート最適性と個人合理性を持たず利得ベクトル
- ▶ 優加法的游戏の配分 $x=(x_1, \dots, x_n)$ は次を満たす
 - ▶ $x_1 + \dots + x_n = v(N)$
 - ▶ $x_i \geq v(\{i\}), i=1, \dots, n$

▶ 8

提携合理性とコア(core)

- ▶ **定義10.3** 利得ベクトル x が**提携合理性**を満たすとは、 N のすべての提携 S に対して

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

- ▶ **定義10.4** 提携形 n 人ゲームの**コア**とは、提携合理性を満たす**配分**の集合である。

パレート最適性
個人合理性

▶ 9

続・コア(core)

- ▶ 次の2条件を満たすとき、「利得ベクトル x が提携 S を通して利得ベクトル y を**支配する**」
 - ▶ 実現可能性条件 $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$
 - ▶ 選好条件 すべての $i \in S$ に対して $x_i > y_i$
- ▶ 単に「 x が y を支配する」 $\Leftrightarrow$ ある提携を通して x が y を支配する
- ▶ **定理10.1** 優加法性ゲームでは、コアは他の配分に支配されない配分の集合である。

▶ 10

例10.1 ベンチャー企業の起業

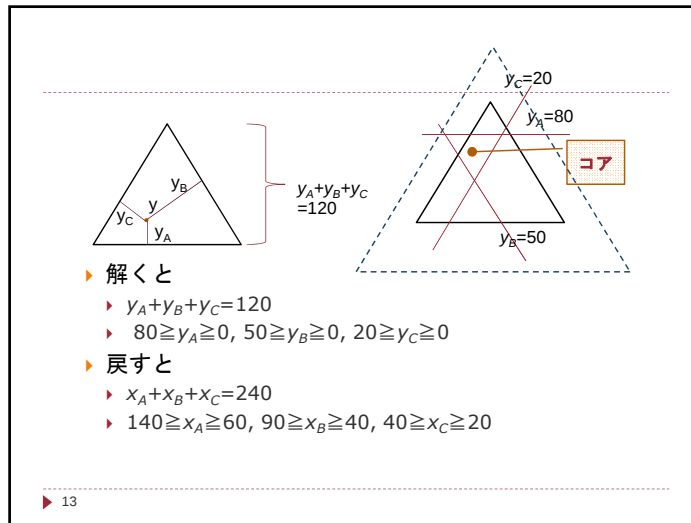
- ▶ A、B、Cがベンチャー企業を作ろうと思う
 - ▶ 3人別々に起業した場合：A 60万円、B 40万円、C 20万円
 - ▶ 2人共同の起業の場合：ABペア 200万円、ACペア 150万円、BCペア 100万円
 - ▶ 3人での起業：240万円
- ▶ 特性関数 v
 - ▶ $v(\{A\})=60, v(\{B\})=40, v(\{C\})=20$
 - ▶ $v(\{A,B\})=200, v(\{A,C\})=150, v(\{B,C\})=100$
 - ▶ $v(\{A,B,C\})=240$
 - ▶ 優加法的：任意の提携 $S, T(S \cap T = \emptyset)$ について

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

▶ 11

- ▶ 優加法的なとき、コアはパレート最適であるから
 - ▶ $x_A + x_B + x_C = 240$
- ▶ 提携合理性から
 - ▶ $x_A + x_B \geq 200, x_A + x_C \geq 150, x_B + x_C \geq 100$
- ▶ 個人合理性から
 - ▶ $x_A \geq 60, x_B \geq 40, x_C \geq 20$
- ▶ 特性関数の**ゼロ正規化**： $y_A = x_A - 60, y_B = x_B - 40, y_C = x_C - 20$ と変換
 - ▶ $y_A + y_B + y_C = 120$
 - ▶ $y_A + y_B \geq 100, y_B + y_C \geq 40, y_A + y_C \geq 70,$
 - ▶ $y_A \geq 0, y_B \geq 0, y_C \geq 0$
- ▶ 解くと
 - ▶ $y_A + y_B + y_C = 120$
 - ▶ $80 \geq y_A \geq 0, 50 \geq y_B \geq 0, 20 \geq y_C \geq 0$

▶ 12



限界貢献度に基づく解（シャーププレイ値）

プレイヤー*i*のシャーププレイ値($i = 1, \dots, n$)

$$\phi_i = \sum_{S: i \in S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})] \quad \text{ただし } v(\emptyset) = 0$$

$v(S) - v(S - \{i\})$: 提携*S*に属するプレイヤー*i*の
*S*に対する限界貢献度
 $\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$: *n*人のプレイヤーがランダムな順序で
 全員の提携(*N*)を形成するときに
 プレイヤー*i*が提携*S*に参加して限界
 貢献度 $v(S) - v(S - \{i\})$ を得る確率
 $(s-1)!$: *i*の前に提携に参加している(*s*-1)人の並び方の総数
 $(n-s)!$: *i*の後に提携に参加する(*n*-*s*)人の並び方の総数

▶ 14

シャーププレイ値の計算：3人ゲームの場合

可能な順序	A	B	C
A B C	60	140	40
A C B	60	90	90
B A C	160	40	40
B C A	140	40	60
C A B	130	90	20
C B A	140	80	20
平均値(ϕ)	115	80	45

▶ $N = \{A, B, C\}$ の全員提携の
 すべてのでき方（順序）
 をあげる（ $3! = 6$ 通り）
 ▶ それぞれについて限界貢
 献度を計算
 ▶ その平均値がシャーププレ
 イ値になる
 ▶ $(\phi_A, \phi_B, \phi_C) =$
 (115, 80, 45)
 ▶ この例では、コアに含まれな
 いことに注意

▶ 15

■交渉ゲーム

例9.1 収益分配の交渉

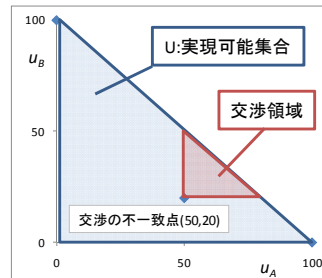
▶ AとBの共同事業
 ▶ 予想収益100万円
 ▶ 収益分配を合意する必要
 ▶ 合意できなければ収益ゼロ
 ▶ 単独の事業をした場合
 ▶ A：50万円
 ▶ B：20万円
 ▶ 利得を金額で表す

定式化

▶ u_A, u_B : A、Bの利得
 ▶ 100万円の分配は
 ▶ $u_A + u_B = 100, u_A \geq 0, u_B \geq 0$
 ▶ 実現可能性集合
 $U = \{u = (u_A, u_B) \mid u_A + u_B \leq 100, u_A \geq 0, u_B \geq 0\}$
 ▶ 交渉の不一致点 $d = (50, 20)$
 ▶ 交渉問題 = (U, d)

▶ 16

- ▶ u_A, u_B : A、Bの利得
- ▶ 100万円の分配は
 - ▶ $u_A + u_B = 100, u_A \geq 0, u_B \geq 0$
- ▶ 実現可能性集合 $U = \{u = (u_A, u_B) \mid u_A + u_B \leq 100, u_A \geq 0, u_B \geq 0\}$
- ▶ 交渉の不一致点 $d = (50, 20)$
- ▶ 交渉問題 = (U, d)

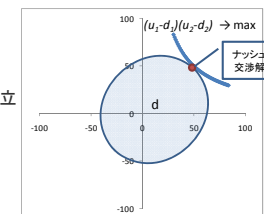


- ▶ ナッシュ交渉解は
 - ▶ $u_A = 65$
 - ▶ $u_B = 35$

▶ 17

交渉ゲーム：前回の講義

- ▶ 4つの公理
 - ▶ 公理9.1 (強) パレート最適性
 - ▶ 公理9.2 対称性
 - ▶ 公理9.3 効用の正1次変換からの独立
 - ▶ 公理9.4 無関係な結果からの独立性



- ▶ 定理9.1 (ナッシュ交渉解)
 - ▶ 交渉問題 (U, d) において、 U は有界閉な凸集合で、 $u_i > d_i$ ($i=1, 2$) を満たす U の点 $u = (u_1, u_2)$ が存在する。このとき、公理9.1～公理9.4を満たす交渉解 f がただ1つ存在する。交渉解 F は、 (U, d) に対して、 $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$ [ただし $(u_1, u_2) \in U, u_i \geq d_i$ ($i=1, 2$)] を最大にする利得ベクトル $(u^*_1, u^*_2) \in U$ を与える。

$$F(U, d) = (u^*_1, u^*_2)$$

▶ 18

- 今日はおしまい
- 次回(5/17)は「ダイナミックなゲーム」を扱います。
- テキスト6章 (の少なくとも前半) を読んでおいてください



▶ 19