



第7回目

- ダイナミックなゲーム(3)
／繰り返しゲーム(1)

ゲーム理論

火曜 2限 2011.05.31

高木英至

1

本日の範囲

- ▶ 前回のQuiz解説
- ▶ 展開形の例：議会 vs 大統領
- ▶ テキスト練習問題
 - ▶ シュタツケルベルク均衡
- ▶ 応用：交渉の戦略的アプローチ
 - ▶ 交互提案ゲーム（9章）
 - ▶ ランダムな提案者ゲーム（10章）
- ▶ 時間があれば：繰り返しゲームの導入



▶ 2

例：議会 vs 大統領

▶ 出典

- ▶ Dixit, A.K., & Nalebuff, B.J. (2008) *The Art of Strategy: A Game Theorist's Guide to Success in Business and Life*. W W Norton & Co Inc. ディキジット & ネイルバフ 『戦略的思考をどう実践するか：エール大学式「ゲーム理論」の活用法』，嶋津祐一・池村千秋(訳)，阪急コミュニケーションズ。

▶ アメリカ政治

- ▶ 議会：利益誘導型の予算を通そうとする
- ▶ 大統領：肥大化した予算を削ろうとする
- ▶ レーガン大統領：個別拒否権（予算案の特定の項目だけを削除する権限）が必要だ
- ▶ しかし、個別拒否権は大統領に有利に働くか？

▶ 3

▶ 予算案

- ▶ 都市（都市再生計画）：議会が通したい
- ▶ ミサイル（弾道ミサイル迎撃システム）：大統領が通したい

結果	議会	大統領
都市+ミサイル	3	3
都市だけ	4	1
ミサイルだけ	1	4
どちらもなし	2	2

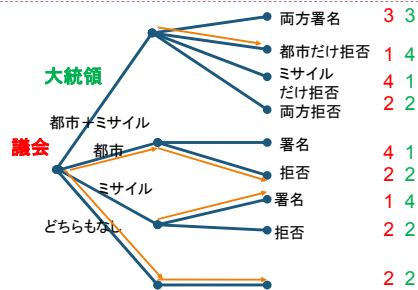
▶ 大統領に個別拒否権がない場合



- ▶ 大統領の選択を先読みして議会が動く
- ▶ 部分ゲーム完全均衡点は
(都市+ミサイル、署名・拒否・署名)
- ▶ 結果は「都市+ミサイル」で「署名」

▶ 4

▶ 大統領に個別拒否権がある場合



- ▶ 部分ゲーム完全均衡点は
 (都市、都市だけ拒否・拒否・署名) と (どちらもなし、何でもよい)
 ▶ 結果は「どちらもなし」。個別拒否権がない場合より大統領は不利

▶ 5

練習問題6-3(シュタッテルベルク均衡)

▶ 例3.6のクールノー寡占市場ゲーム(クールノー均衡)

p : 製品の価格 q_1 : 企業1の供給量 q_2 : 企業2の供給量
 ただし、両者の限界費用は同じ: $c_1 = c_2 = c$.

市場の(逆)需要関数は、

$$p = a - b(q_1 + q_2), \quad a, b > 0 \quad (4.1)$$

$$\text{企業1の利潤関数} \quad f_1(q_1, q_2) = pq_1 - cq_1 \quad (4.2)$$

$$\text{企業2の利潤関数} \quad f_2(q_1, q_2) = pq_2 - cq_2$$

最適解は $\frac{df_1}{dq_1} = 0$ を満たすので、最適解は $\frac{df_2}{dq_2} = 0$ を満たすので、

$$q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2}, \quad \text{同様に} \quad q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}$$

この連立方程式を解くとナッシュ均衡(q_1^*, q_2^*)

= クールノー均衡が得られる。

$$q_i^* = \frac{a-c}{3b}, \quad f_i(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{9b} \quad (i=1,2)$$

▶ 6

▶ シュタッテルベルク均衡とは

- ▶ 企業1が最初に供給量 q_1 を決定
- ▶ 企業2は q_1 を知ったうえで自分の供給量 q_2 を決定

▶ いわば、

- ▶ クールノー均衡のゲームは同時手番ゲーム
 - ▶ 相互の最適応答が交わるところがクールノー均衡点(ナッシュ均衡点)

- ▶ シュタッテルベルク均衡のゲームは逐次手番ゲーム

▶ シュタッテルベルク均衡はどのように解くべきか?

- ▶ クールノー均衡とシュタッテルベルク均衡とで、両企業の供給量は異なるか?

▶ 7

シュタッテルベルク均衡の解き方(1)

市場の(逆)需要関数は、

$$p = a - b(q_1 + q_2), \quad a, b > 0 \quad (4.1)$$

■ 先に q_1 が決まっているときの、企業2の最適供給量を求める。

企業2の利潤関数、

$$f_2(q_1, q_2) = pq_2 - cq_2 = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - cq_2$$

$$\frac{df_2}{dq_2} = 2bq_2 + a - bq_1 - c = 0$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}$$

■ q_2^* を前提にしたときの、企業1の最適応答を求める。

$$p = a - b(q_1 + q_2^*) = -\frac{b}{2}q_1 + \frac{a+c}{2}$$

$$f_1 = pq_1 - cq_1 = -\frac{b}{2}q_1^2 + \frac{a+c}{2}q_1, \quad \frac{df_1}{dq_1} = -bq_1 + \frac{a+c}{2} = 0 \quad \therefore q_1^* = \frac{a-c}{2b}$$

▶ 8

シュタッケルベルク均衡の解き方(2)

■企業2は $q_2^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{2 \cdot 2b} = \frac{a-c}{4b}$.

■全供給量は $q_1^* + q_2^* = \frac{3(a-c)}{4b}$.

■価格 $p^* = a - \frac{3(a-c)}{4} = \frac{a+3c}{4}$.

■利潤は

$$f_1^* = (p-c)q_1^* = \frac{(a-c)^2}{8b},$$

$$f_2^* = (p-c)q_2^* = \frac{(a-c)^2}{16b}.$$

▶ 9

2つの均衡の比較

シュタッケルベルク均衡 クールノー均衡

$$q_1 = \frac{a-c}{2b},$$

$$q_1 = \frac{a-c}{3b},$$

$$q_2 = \frac{a-c}{4b}.$$

$$q_2 = \frac{a-c}{3b}.$$

$$f_1 = \frac{(a-c)^2}{8b},$$

$$f_1 = \frac{(a-c)^2}{9b},$$

$$f_2 = \frac{(a-c)^2}{16b}.$$

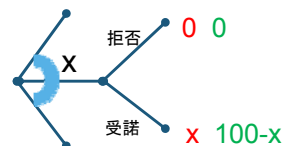
$$f_2 = \frac{(a-c)^2}{9b}.$$

▶ 10

ここで、交互提案ゲーム

- ▶ 第9章の4
- ▶ 例6.3 最後通告ゲーム

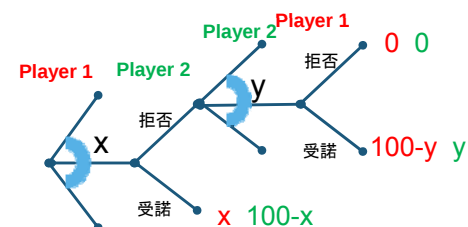
提案者 応答者



▶ 11

交互提案ゲーム

- ▶ n=2 のとき (交互に1回ずつ提案)



(100-100δ, 100δ)を (0, 100)を δ: 将来利得の割引
Player 1 は提案 Player 2 は提案 因子(0 ≤ δ < 1)

▶ 12

ランダムな提案者ルール

- ▶ 第10章の4
- ▶ 例：3人対称ゲーム（協力ゲーム）
- ▶ 特性関数 v
 - ▶ $v(\{1\})=0, v(\{2\})=0, v(\{3\})=0$
 - ▶ $v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=a, 0 < a < 1$
 - ▶ $v(\{1,2,3\})=1$
 - ▶ 優加法的
- ▶ プレイヤーがランダムに配分の提案を行う
- ▶ この交渉ゲームの部分ゲーム完全均衡点は？
- ▶ 前提：どの交渉ラウンドでも、プレイヤーは同じ戦略を採用する（定常部分ゲーム完全均衡点）

▶ 13

プレイヤー i の期待利得を v_i とおく ($i=1,2,3$).

プレイヤー i の最適応答： δv_i 以上の利得が提案されれば受諾
プレイヤー1が提案者のとき、

1は $(1-\delta v_2 - \delta v_3, \delta v_2, \delta v_3)$ を提案 $\rightarrow$ 2,3は受諾

$$1 \text{の期待利得は} \quad v_1 = \frac{1}{3}(1 - \delta v_2 - \delta v_3) + \frac{2}{3}\delta v_1$$

$$\text{したがって} \quad (3-2\delta)v_1 + \delta v_2 + \delta v_3 = 1 \quad (1)$$

$$\text{同様に} \quad \delta v_1 + (3-2\delta)v_2 + \delta v_3 = 1$$

$$\delta v_1 + \delta v_2 + (3-2\delta)v_3 = 1$$

$$3 \text{つの等式を加えると} \quad v_1 + v_2 + v_3 = 1$$

$$v_2 + v_3 = 1 - v_1 \text{を(1)に代入して解くと、} v_1 = 1/3.$$

$$\rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = 1/3.$$

▶ 14

■ 繰り返しゲーム（第7章）

- ▶ ここまでの同時手番ゲームは、1回だけ行うゲームと考えて来た
- ▶ しかし同じ相手と将来もプレイすると思えば、行動は変わるかも知れない
- ▶ 実際の社会的関係は、繰り返しゲームとして概念化しやすい
- ▶ ここでの前提
 - ▶ 完全情報をもつ繰り返しゲーム

		C	B	D
A	C	5	5	0
	D	7	0	1

囚人のディレンマ(PD)
図7.1の利得行列

▶ 15

話は変わって... 繰り返し囚人のジレンマ

- ▶ 囚人のジレンマではナッシュ均衡点はD D
- ▶ このモデルでは、C Cが望ましくてもC Cには至れない
- ▶ しかしC Cに至ることがあり得ることを説明する方法がいくつかある
- ▶ その1つ＝繰り返しゲームでの定式化
 - ▶ 完全情報をもつ繰り返しゲーム
 - ▶ 実際の対人接触は、繰り返しゲームとして概念化しやすい

		C	B	D
A	C	5	5	0
	D	7	0	1

囚人のディレンマ(PD)
図7.1の利得行列

▶ 16

繰り返し囚人のジレンマ

- ▶ 4つの結果
 - ▶ (C,C), (C,D), (D,C), (D,D)
- ▶ 代表的な4つの戦略
 - ▶ All-C: 常にCを選択
 - ▶ All-D: 常にDを選択
 - ▶ トリガー戦略(trigger strategy)
 - ▶ 最初はCを選択
 - ▶ 2回目以降は、一度でも相手がDを出したら以後ずっとDを選択
 - ▶ しっぺ返し戦略(tit-for-tat strategy)
 - ▶ 最初はCを選択
 - ▶ 2回目以降は前回の相手と同じ選択をする

自分	C	C	D	D	D	C	C	C	C
相手	C	D	D	D	C	C	C	C	C

▶ 17

将来利得の割引

- ▶ 1回後に見込まれる利得には δ をかけて割り引く
 - ▶ $0 \leq \delta < 1$
 - ▶ δ : 将来利得の割引因子
 - ▶ δ の意味
 - ▶ 将来への評価
 - ▶ 次回もゲームが続く確率
 - ▶ 時間の遅れに対するプレイヤーの忍耐度
- ▶ 【例】ずっと利得5を受け取る場合の「割引利得の総和」

$$5 + 5\delta + 5\delta^2 + \dots = \frac{5}{1-\delta}$$

▶ 18

	All-C	All-D	trigger	Tit-for-tat
All-C	(5,5)	(0,7)	(5,5)	(5,5)
All-D	(7,0)	(1,1)	(7-6 δ , δ)	(7-6 δ , δ)
Trigger	(5,5)	(δ , 7-6 δ)	(5,5)	(5,5)
Tit-for-tat	(5,5)	(δ , 7-6 δ)	(5,5)	(5,5)

- All-D同士の組合せは、 δ の値にかかわらず、ナッシュ均衡点である。
- $\delta \geq 1/3$ なら、トリガー戦略同士の組合せはナッシュ均衡点である(定理7.1)。
- 同様に、 $\delta \geq 1/3$ なら、しっぺ返し戦略同士の組合せはナッシュ均衡点である。
- すべての戦略が実行可能であるとき、 $\delta \geq 2/5$ なら、しっぺ返し戦略同士の組合せはナッシュ均衡点である(定理7.2)。
- δ の値は利得行列7.1が前提

▶ 19

この結果の意味するところ

- ▶ All-Dを取りあう（その結果(D,D)が続く）ことは、繰り返し囚人のジレンマでもナッシュ均衡点である
- ▶ しかし、 δ がある程度大きいとき、トリガー戦略やしっぺ返し戦略を取りあうこともナッシュ均衡点になる
- ▶ そのとき、(C,C)が出現する
- ▶ δ の大きさの意味
 - ▶ プレイヤーにとり将来の利得がある程度重要
 - ▶ 将来的な「つきあい」が予想される
- ▶ 「長期的な関係」の中で囚人のジレンマがプレイされれば、相互協力は生じ得る
- ▶ Axelrod, R., 1984, The Evolution of Cooperation. NY: Basic Books. アクセルロッド 松田裕之(訳) 『つきあい方の科学』、1987、H B J 出版局。

▶ 20

-
- 今日はおしまい
 - 次回(6/7)は「繰り返しゲーム」を扱います。
 - テキスト7章に目を通しておいってください

