



第9回目

● 繰り返しゲーム (2)

ゲーム理論

火曜 2限 2011.06.14

高木英至

1

▶ 本日より

- ▶ 前回のQuiz解説
- ▶ (再度)フォーク定理
- ▶ ケールノー市場での暗黙の協調
- ▶ ベルトラン均衡の例
 - ▶ 練習問題7-2
- ▶ 他の練習問題
 - ▶ 7-1
 - ▶ 7-3 : タカーハート・ゲーム



▶ 今後の日程

- ▶ 6/21, 6/28 不確実な相手とのゲーム
 - ▶ テキスト8章
- ▶ 7/5 進化ゲーム
 - ▶ テキスト11章
- ▶ 7/12 期末試験

▶ 2

前回のQuiz

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

▶ 3

前回のQuiz

			C	B	D	
	A	C	2	2	0	3
		D	3	0	1	1

共通の分母 $\frac{1}{1-\delta}$ は省略

	All-C	All-D	trigger	Tit-for-tat
All-C	(2,2)	(0,3)	(2,2)	(2,2)
All-D	(3,0)	(1,1)	(3-2δ,δ)	(3-2δ,δ)
Trigger	(2,2)	(δ,3-2δ)	(2,2)	(2,2)
Tit-for-tat	(2,2)	(δ,3-2δ)	(2,2)	(2,2)

All - D 対 Trigger の場合

$$\text{All - D の割引利得和} = 3 + \delta + \delta^2 + \dots = 3 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{3-2\delta}{1-\delta}$$

$$\text{Trigger の割引利得和} = 0 + \delta + \delta^2 + \dots = \frac{\delta}{1-\delta}$$

Trigger が繰り返し囚人のジレンマゲームのナッシュ均衡点であるためには、

$$3-2\delta \leq 2 \quad 2\delta \geq 1 \quad \delta \geq \frac{1}{2}$$

▶ 4

フォーク定理

- ▶ δ が十分に1に近いとき、囚人のジレンマのすべての個人合理的利得ベクトルは、繰り返しゲームのナッシュ均衡点によって実現される。
- ▶ 言い方を変えると：
 - ▶ 無限回繰り返しの囚人のジレンマでは、 δ が十分に1に近ければ、DD以上の利得を（部分ゲーム完全均衡点として）実現できる
- ▶ 囚人のジレンマに限らない。すべての n 人ゲームについて成立する

▶ 5

クールノー寡占市場への応用（フォーク定理）

p : 製品の価格 q_1 : 企業1の供給量 q_2 : 企業2の供給量

ただし、両者の限界費用は同じ : $c_1 = c_2 = c$.

市場の（逆）需要関数は、

$$p = a - b(q_1 + q_2), \quad a, b > 0 \quad (4.1)$$

$$\text{企業1の利潤関数} \quad f_1(q_1, q_2) = pq_1 - cq_1 \quad (4.2)$$

$$\text{企業2の利潤関数} \quad f_2(q_1, q_2) = pq_2 - cq_2$$

ナッシュ均衡(q_1^*, q_2^*) = クールノー均衡は：

$$q_i^* = \frac{a-c}{3b}, \quad f_i(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{9b} \quad (i=1,2)$$

両企業が協調して、1つの独占企業として行動し、利潤を折半する場合は：

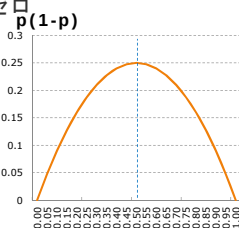
$$q_i = \frac{a-c}{4b}, \quad f_i(q_1, q_2) = \frac{(a-c)^2}{8b} \quad (i=1,2)$$

- ▶ Trigger戦略（裏切りがない限り協調、裏切りがあるとクールノー均衡の供給量を出す）を取り合うことがナッシュ均衡点
- ▶ → 協調が繰り返しゲームのナッシュ均衡点になる

▶ 6

ベルトラン寡占市場(p.156)による説明

- ▶ 企業は同質財の価格を決める
 - ▶ クールノー均衡：供給量で競争
- ▶ 価格で競争
 - ▶ より低い価格 p をつけた企業が需要 $D(p) = 1-p$ を得る
 - ▶ 高い価格をつけた企業の需要はゼロ
- ▶ 生産の単位費用はゼロと仮定
- ▶ → 利潤は $p(1-p)$
- ▶ 独占企業の利潤の最大は
 - ▶ $P^* = 1/2$
 - ▶ 利潤 = $1/4$
- ▶ 価格が $1/2$ から下がるごとに
 - ▶ 利潤は低下



		企業2	
		$P=a$	$P=a-\epsilon$
企業1	$P=a$	$a(1-a)/2$	$(a-\epsilon)(1-a+\epsilon)$
	$P=a-\epsilon$	$a(1-a)/2$	0
		0	$(a-\epsilon)(1-a+\epsilon)/2$
		$(a-\epsilon)(1-a+\epsilon)$	$(a-\epsilon)(1-a+\epsilon)/2$

		企業2	
		$P=1/2$	$P=1/2-1/10$
企業1	$P=1/2$	0.125	0.24
	$P=1/2-1/10$	0.125	0
		0	0.12
		0.24	0.12

		企業2	
		$P=1/2$	$P=0.1$
企業1	$P=1/2$	0.125	0.09
	$P=0.1$	0.125	0
		0	0.045
		0.09	0.045

- ▶ 相手よりも若干低い価格をつけるのが最適
- ▶ 価格はゼロに近づく（ベルトラン均衡）
- ▶ 下げ幅が大き過ぎることが最適とは限らない

▶ 8

練習問題7-2

- ▶ ベルトラン寡占市場（2企業）の繰り返しゲーム
- ▶ 完全情報（過去の価格が分かる）
- ▶ 両企業が独占価格（ $p=1/2$ ）を選ぶ状態がtrigger戦略によって部分ゲーム完全均衡点となる
- ▶ そのための δ の条件は？
- ▶ Trigger戦略：双方が独占価格を選び限り独占価格をつけるが、一方が価格を変化させればゼロ価格（ベルトラン均衡）を選択する
- ▶ X戦略：初回に $p=1/2-\varepsilon$ をつける

▶ 9

trigger戦略同士の割引利得は

$$1/8(1+\delta+\delta^2+\dots)=\frac{1/8}{1-\delta}$$

	trigger	X
trigger	$\frac{1/8}{1-\delta}$ $\frac{1/8}{1-\delta}$	? $1/4-\varepsilon^2$
X	$1/4-\varepsilon^2$?	? ?

trigger戦略に対してX戦略の利得は $1/4-\varepsilon^2$.

$$\text{初回で } (1/2-\varepsilon)(1-1/2+\varepsilon)=1/4-\varepsilon^2$$

$$\text{その後は } 0\times\delta+0\times\delta^2+0\times\delta^3+\dots=0$$

trigger戦略が部分ゲーム完全均衡点であるためには、

$$\frac{1}{8(1-\delta)} \geq 1/4-\varepsilon^2$$

$$\varepsilon\text{がどの値でも上式が成り立つためには } \frac{1}{8(1-\delta)} \geq 1/4$$

$$\text{したがって } \delta \geq 1/2.$$

▶ 10

タカーハト・ゲーム（練習問題7-3）

- ▶ ハト戦略をとり続けることが、 δ が1に近いとき、ナッシュ均衡点になることを示せ。
- ▶ trigger戦略：ハトを選び続け、相手がタカになったら以後ずっとタカを選ぶ
- ▶ X戦略：初回にタカを選ぶ任意の戦略

		ハト	タカ
1 ハト		2 2	1 3
タカ		3 1	0 0

▶ 11

trigger戦略同士の割引利得は

$$2(1+\delta+\delta^2+\dots)=\frac{2}{1-\delta}$$

	trigger	X
trigger	$\frac{2}{1-\delta}$ $\frac{2}{1-\delta}$	$3+a$ $1+b$
X	$3+a$ $1+b$	? ?

$$a:\text{最大で } \frac{1-\delta}{1-\delta}$$

$$b:\text{最大で } \frac{3\delta}{1-\delta}$$

したがって、trigger戦略が選ばれるのは

$$\frac{2}{1-\delta} \geq 3 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

$$2 \geq 3(1-\delta) + \delta \quad 2\delta \geq 3-2=1$$

$$\delta \geq 1/2.$$

- ▶ δ が十分に1に近ければ、trigger戦略同士が繰り返しゲームのナッシュ均衡になることにより、（ハト、ハト）が実現できる

▶ 12

-
- 今日はおしまい
 - 次回(6/21)は、第8章「不確実な相手とのゲーム」に入ります。
 - テキスト8章に目を通しておいってください

