

2011年度 ゲーム理論 期末試験 [2011/7/12 (火)] 解答例

以下に解答例を書いておきます。

この解答に不備があると考えられる場合は、7月末日までに高木にお伝えください。確認の上善処します。

高木の連絡先: etakagi@mail.saitama-u.ac.jp

問1: 次の(1)～(5)の用語を解説しなさい。(各5点、計25点)

(1) 情報集合

行動を選択するときにプレイヤーが位置する分岐点の集まりのこと。情報集合が複数の分岐点を含むとき、プレイヤーは情報集合のどの分岐点にいるかは知らない。(テキスト、pp. 116-117)

(2) シュタッケルベルク均衡

企業が供給量を意思決定する寡占市場において、先導する企業（リーダー）がまず供給量を決め、追従する企業（フォロワー）がリーダーの供給量を前提に自らの供給量を決めることで生じる均衡。(テキスト、p. 133)

(3) フォーク定理

将来利得の割引因子 δ が十分に1に近いとき、囚人のジレンマにける個人合理的な利得ベクトルは、繰り返しゲームのナッシュ均衡点によって実現される、とする定理。この定理は囚人のジレンマに限らず、すべての n 人ゲームで成り立つ。(テキスト、p. 150)

(4) 事後予想

相手の行動を知った上で抱く予想のこと。事前予想と対になる用語である。例えば、事後予想の $p(t|v)$ は、情報集合 v に達したときに相手がタイプ t である条件付き確率を指す。 $p(t|v) = p(t \cap v) / p(v)$ である。(テキスト、pp. 168-169)

(5) 共進化

複数の集団の間で相互作用が繰り返される結果、それぞれの集団内で行動が進化することを指す。進化ゲームにおける用語である。(テキスト、p. 254)

問2: 右図のゲームの木で表される完全情報2人ゲームに関し、次の(a)、(b)に答えなさい。純戦略だけを考えること。(25点)

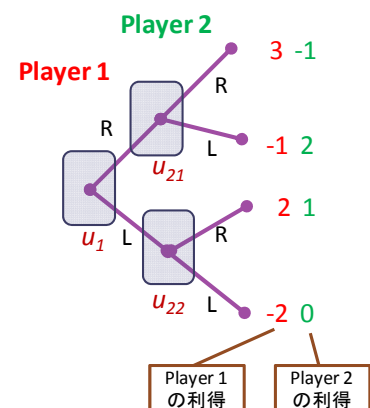
(a) 部分ゲーム完全均衡点は何か？

(b) ナッシュ均衡点で部分ゲーム完全均衡点でないものはあるか？

【解答例】

(a) 先読み推論によって部分ゲーム完全均衡点を求める。情報集合 u_{21} ではプレイヤー2はL選択が最適であり、情報集合 u_{22} ではR選択が最適である。プレイヤー2のこの選択を先読みすれば、プレイヤー1の最適選択はLである。従って (L, L R) が部分ゲーム完全均衡点になる。

(b) 右図のゲームを標準型にすると利得表1のゲームとなる。このときの(純戦略だけを考えた)ナッシュ均衡点は (R, L) である。さらに、プレイヤー2の2つの情報集合での選択で戦略を定義すると、



このゲームは利得表2で表せる。利得表2から、ナッシュ均衡点は(R, LL)と(L, LR)である。(L, LR)は部分ゲーム完全均衡点であり、(R, LL)は、ナッシュ均衡点ではあるが部分ゲーム完全均衡点ではない。

Player 2

	R	L
Player 1 R	3, -1	-1, 2
L	2, 1	-2, 0

利得表1

ナッシュ均衡点

Player 2

	RR	RL	LR	LL
Player 1 R	3, -1	3, -1	-1, 2	-1, 2
L	2, 1	-2, 0	2, 1	-2, 0

利得表2

問3：右の利得表で表されるタカーハート・ゲームを考える。利得表中の x は $3 > x > 1$ の範囲にある。ここで、両プレイヤーがハート戦略をプレイし続ける状態が繰り返しゲームの均衡点として実現可能であるために x が満たすべき条件を求めなさい (x の範囲はさらにどのように限定されるか?)。将来利得に対する割引因子 δ は $\delta = 1/2$ だと仮定すること。(15点)

Player 2

	ハート	タカ
Player 1 ハート	x, x	1, 3
タカ	3, 1	0, 0

利得表

【解答例】最初にハート戦略をとるトリガー戦略を考える。このトリガー戦略では、両者がハートを選ぶ限りハートを続けるが、それ以外のときは以後、タカ戦略を取り続ける。両プレイヤーがこのトリガー戦略をとるなら、(ハート, ハート)の組が出現し続ける。そのとき、両プレイヤーとも、次の割引利得を得ることになる。

$$x + x\delta + x\delta^2 + x\delta^3 + \dots = \frac{x}{1-\delta}.$$

ここで戦略Aを、最初にタカを選択するような任意の戦略であるとする。プレイヤー1がトリガー戦略をとり、プレイヤー2がAに従うとすれば、プレイヤー2は最初の利得は3であるが、プレイヤー1は以後タカを取り続けるので、利得は最善でも1となる。

従ってプレイヤー2の利得は多くても次となる。

$$3 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 3 + \frac{\delta}{1-\delta}.$$

他方、そのときのプレイヤー1の利得は、最初は1を得るが、以後タカを選び続けるので、利得は多ければ次のようになる。

$$1 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = 1 + \frac{3\delta}{1-\delta}$$

従って、右のような利得表をつくることができる。

つまり任意の戦略Aよりトリガーが常に望ましく、トリガーを取り合うことがナッシュ均衡点となるのは、次の条件が成り立つときである。

Player 2

	トリガー	A
Player 1 トリガー	$\frac{x}{1-\delta}, \frac{x}{1-\delta}$	$3 + \frac{\delta}{1-\delta}, 1 + \frac{3\delta}{1-\delta}$
A	$1 + \frac{3\delta}{1-\delta}, 3 + \frac{\delta}{1-\delta}$	?, ?

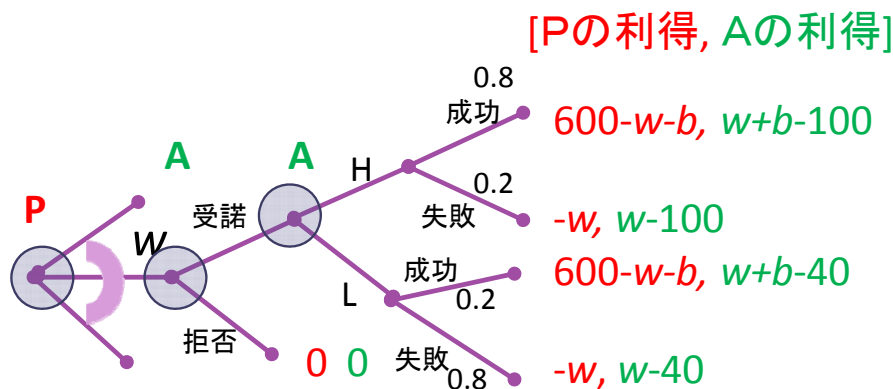
利得表

$$\frac{x}{1-\delta} \geq 3 + \frac{\delta}{1-\delta} \quad x \geq 3(1-\delta) + \delta = 3 - 2\delta.$$

$\delta = \frac{1}{2}$ であるから、求めるべき条件は $(3 - 2\delta)x \geq 2$ である。

問4：下図のゲームの木で表されるボーナス賃金契約のゲームを考える。経営者Pはプロジェクト実行のため、労働者Aに固定賃金 $w(\geq 0)$ を提示する。このプロジェクトが成功すればPは600の利得を得、失敗すれば何も得ない。Aは賃金 w での労働を受諾するか拒否するかを選択する。受諾した場合、Aには高い努力を払う(H)か低い努力で済ませる(L)かの選択がある。H選択には100の、L選択には40のコストが、Aに伴う。Hならプロジェクトの成功確率は0.8、失敗確率は0.2である。Lなら、逆に成功確率は0.2、失敗確率は0.8となる。ここでPは、プロジェクトが成功したとき、Aにボーナス $b(\geq 0)$ を支払うこととした。それぞれの場合のPとAの利得は、下図の右端に記載する。このゲームについて、次の(a)～(c)に解答しなさい。(25点)

- (a) このゲームのインセンティブ両立条件(AがLではなくHを選択する条件)は何か？
 (b) このゲームの参加条件(H選択を前提にAが賃金 w を受諾する条件)は何か？
 (c) インセンティブ両立条件と参加条件を満たすことを前提に、Aの行動を推論する合理的なPは、どのように w と b を提示するか？



【解答例】

(a) 受諾したときのAの期待利得は：

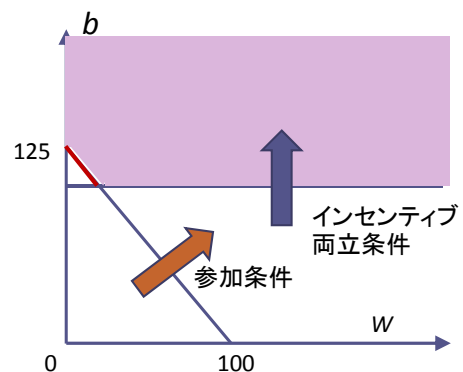
Hのとき、 $0.8(w+b-100) + 0.2(w-100) = w-100+0.8b$

Lのとき、 $0.2(w+b-40) + 0.8(w-40) = w-40+0.2b$

従ってインセンティブ両立条件は $w-100+0.8b \geq w-40+0.2b \rightarrow b \geq 100$ である。

(b) 参加条件は、 $w-100+0.8b \geq 0$ である。インセンティブ両立条件と参加条件をとともに満たす (w, b) は右図の紫の領域となる。

(c) 上記の両条件を満たすよう w と b を提示すればAは受諾し高い努力をすることをPは先読みしている。ここでPの期待利得は $0.8(600-w-b) + 0.2(-w) = 480 - (w+0.8b)$ である。つまりPの利得は $(w+0.8b)$ が小さいほど高い。そこで、 $b \geq 100$ という制約のもとで $w+0.8b-100 = 0$ となるときが、Pにとって最適である。その範囲は右図の赤い線にある。



問5：戦略 s^* がある集団内で「進化的に安定な戦略(ESS)」であるとは、 ε を小さな比率として、 ε だけ戦略 t が突然変異で生まれても、

$$\text{戦略 } s^* \text{ の適応度} > \text{戦略 } t \text{ の適応度}$$

となることを意味している。ここで $u(s^*, s^*), u(s^*, t), u(t, s^*), u(t, t)$ の記号を使うとする。

$u(s^*, s^*)$: s^* プレイヤーに対したときの s^* プレイヤーの利得

$u(s^*, t)$: t プレイヤーに対したときの s^* プレイヤーの利得

$u(t, s^*)$: s^* プレイヤーに対したときの t プレイヤーの利得

$u(t, t)$: t プレイヤーに対したときの t プレイヤーの利得

このとき、「戦略 s^* の適応度 $>$ 戦略 t の適応度」というESSの条件をこれらの記号を用いて表記しなさい。(10点)

【解答例】

小さな比率 ε に対して

$$(1-\varepsilon)u(s^*, s^*) + \varepsilon u(s^*, t) > (1-\varepsilon)u(t, s^*) + \varepsilon u(t, t)$$

が成り立つことが、 s^* がESSであるための条件である。

[以上]