



● 選択と意思決定(3)

ゲーム理論入門

火曜 2限 2012.10.23

高木英至

1

前回のQuizについて

- ▶ Q1. 本日の授業では、リスク回避型の効用関数であれば掛け捨ての保険に入りやすく、リスク選好型の効用関数であれば賭けをしやすい。では、保険に入って賭けもする人が(いると思うが)いるのはなぜか? 思いつけば自分の考えを述べよ。
 - ▶ 決まった正解はない。今日の授業で触れる。
- ▶ Q2. 人が国政選挙で投票に行くことは合理的な判断といえるか? 自由に論ぜよ。
 - ▶ 皆さんの回答
 - ▶ 合理的: 31
 - ▶ 不合理: 14
 - ▶ この後で触れる

▶ 2

▶ Q3. 今日の授業で分らなかったこと、もしくは疑問に思ったことを、何でもいいですから書いてください。

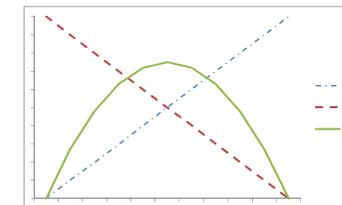
- ▶ 連続性
 - 連続性: $P \geq Q \geq R$ なら、 $pP + (1-p)R$ と Q が無差別になる確率 p が存在する
- ▶ 動機づけの期待理論
- ▶ 期待効用理論
- ▶ ベルヌイの解答

▶ 3

期待効用仮説は心理学の動機づけ理論ともある程度符合する

- ▶ 達成動機の「期待理論」(Atkinsonら)
 - ▶ T: 成功達成傾向の強さ M: 成功達成動機
 - ▶ P: 課題が成功する期待(主観確率) I: 成功の誘因価
 - ▶ $T = V \times P$ ただし $V = M \times I$
 - ▶ 非成功時の効用を0とおけば、上式は期待効用仮説

右図
 Mを一定とする
 $I = 1 - P$
 ■ 達成傾向は、成功確率(課題の困難さの低さ)が中位のとき、より高い



▶ 4

本日の内容

- ▶ 選択と意思決定 (3)
 - ▶ 引き続き、テキスト第2章
 - ▶ 前回Quizの解説
 - ▶ リスク回避とリスク選好
 - ▶ 効用系への反例
 - ▶ プロスペクト理論
 - ▶ テキスト第2章練習問題



▶ 5

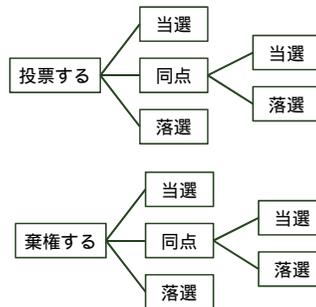
前回Quiz

- ▶ Q2: 人が国政選挙で投票に行くことは合理的な判断といえるか? 自由に論ぜよ。
- ▶ 正解はない。答えはいろいろ。
- ▶ 注目点は次のこと
 - ▶ 個人的合理性と社会的合理性は異なる
 - ▶ テキスト第5章 個人合理性、集団合理性
- ▶ ここで、この問題を「合理的選択」(Rational Choice)の観点で考えてみる
 - ▶ ただし「国政」に限らず、一般論として

▶ 6

意思決定の例：投票か棄権か (1)

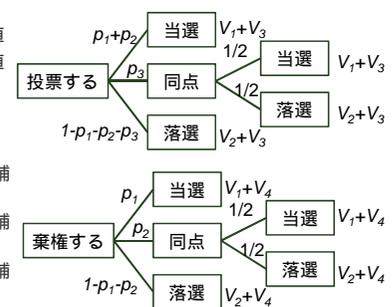
- ▶ 自分が推す候補に投票するか、棄権するか?
- ▶ 候補者は「同点」でも何らかの方法で当落が決まる、と仮定
- ▶ このとき、投票するか棄権するかをどのようにモデル化するのか?



▶ 7

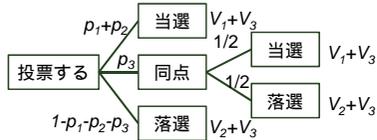
意思決定の例：投票か棄権か (2)

- ▶ 価値 (効用)
 - ▶ V_1 : 推す候補者が当選する価値
 - ▶ V_2 : 他の候補者が当選する価値
 - ▶ V_3 : 投票行為の価値
 - ▶ V_4 : 棄権の価値
- ▶ 確率
 - ▶ p_1 : 自分が投票せずに推す候補者が当選する確率
 - ▶ p_2 : 自分が投票せずに推す候補者が同点になる確率
 - ▶ p_3 : 自分が投票せずに推す候補者が1票差で落選する確率
 - ▶ $1-p_1-p_2-p_3$: 自分が投票せずに、推す候補者が2票以上の差で落選する確率



▶ 8

意思決定の例：投票か棄権か（3）



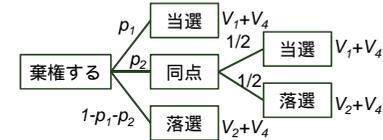
投票することの期待効用は

$$EV(\text{投票}) = (p_1 + p_2)(V_1 + V_3) + p_3(V_1 + V_3)/2 + p_3(V_2 + V_3)/2 + (1 - p_1 - p_2 - p_3)(V_2 + V_3)$$

$$= V_2 + V_3 + p_1(V_1 - V_2) + p_2(V_1 - V_2) + p_3(V_1 - V_2)/2$$

▶ 9

意思決定の例：投票か棄権か（4）



棄権することの期待効用は

$$EV(\text{棄権}) = p_1(V_1 + V_4) + p_2(V_1 + V_4)/2 + p_2(V_2 + V_4)/2 + (1 - p_1 - p_2)(V_2 + V_4)$$

$$= V_2 + V_4 + p_1(V_1 - V_2) + p_2(V_1 - V_2) + p_2(V_1 - V_2)/2$$

▶ 10

意思決定の例：投票か棄権か（5）

$EV(\text{投票}) > EV(\text{棄権})$ となるのは
 $[(p_2 + p_3)(V_1 - V_2)] > [2(V_4 - V_3)]$

$p_2 + p_3$: 選挙が接戦である確率
 $V_1 - V_2$: 2人の候補者の価値の違い



- ▶ 選挙が接戦になるほど投票率は高い
- ▶ 候補者の違いがあるほど投票率は高い
- ▶ 投票することが困難なほど投票率は低い
- ▶ 棄権が社会的に容認されるほど投票率は低い

▶ 11

国政選挙の場合

$EV(\text{投票}) > EV(\text{棄権})$ となるのは
 $[(p_2 + p_3)(V_1 - V_2)] > [2(V_4 - V_3)]$

$p_2 + p_3$: 選挙が接戦である確率
 $V_1 - V_2$: 2人の候補者の価値の違い

予測



- ▶ p_2 : 自分が投票せずに推す候補者が同点になる確率
- ▶ p_3 : 自分が投票せずに推す候補者が1票差で落選する確率
- ▶ $p_2 + p_3$ がほとんどゼロなので、投票が生じるのは $V_4 - V_3$ が低い（投票行為自体に価値を見出している）場合だけである。
- ▶ 不正（利益誘導）がある場合はまた別

▶ 12

期待効用仮説 (テキスト、p.27)

- ▶ 期待効用 (expected utility) : 効用の期待値

$$E(U) = \sum p_i \cdot u_i$$

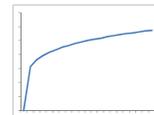
- ▶ 期待効用を最大化する選択肢を選ぶ
- ▶ $P \succsim Q \iff u(P) \geq u(Q)$. $u(P), u(Q)$ は期待効用

- ▶ 期待効用仮説が成り立つ効用関数が存在するための条件 : 選好関係が次の条件を充たすこと

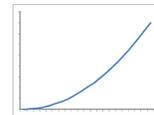
- ▶ 完備性 : すべての選択対象 x と y に対して次が必ず成り立つ : $x \succsim y$ または $y \succsim x$
- ▶ 推移性 : x, y, z に対して $x \succ y$ かつ $y \succ z$ ならば $x \succ z$
- ▶ 独立性 : $P \succ Q$ ならば任意の確率 p に対して $pP + (1-p)R \succ pQ + (1-p)R$
- ▶ 連続性 : $P \succ Q \succ R$ なら、 $pP + (1-p)R$ と Q が無差別になる確率 P が存在する

▶ 13

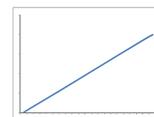
効用関数の型



- ▶ 2 選択肢
- ▶ P: 確率 1/2 で 1 万円、1/2 で何ももらえない
- ▶ Q: 確実に 5 千円もらえる
- ▶ リスク回避型: $Q \succ P$



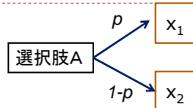
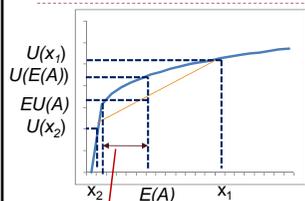
- ▶ 上に凸
- ▶ リスクを避けて確実な選択肢を選ぶ
- ▶ リスク選好型: $P \succ Q$



- ▶ 上に凹 (下に凸)
- ▶ リスクを含む選択肢を好む
- ▶ リスク中立型: P と Q は無差別

▶ 14

リスク回避型の効用関数



リスク
プレミア ρ

$$E(A) = px_1 + (1-p)x_2$$

$U(E(A))$: 富の期待値の効用

$EU(A) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$: 期待効用

リスク回避型効用関数の場合、 $U(E(A)) > EU(A)$

\Rightarrow リスクを回避するために支出する余地がある

$$U(E(A) - \rho) = EU(A) \text{ となる } \rho > 0 \text{ がある}$$

▶ 15

掛け捨て保険の例

- ▶ I: 現財産、D: 可能な損害額
- ▶ 保険料 Q を掛け捨てで払えば、損害が生じても $I - Q$ の財産は保障してくれる
- ▶ 期待財産は 保険非加入 > 保険加入
- ▶ このとき、人は保険に入るか?
- ▶ もし保険加入者が平均的に得をするなら、保険会社は儲からないはずだ。
 - ▶ では保険に加入する人は不合理か?
- ▶ 期待効用理論では、入る場合あり
 - ▶ 効用関数が危険回避的 (上方に凸)

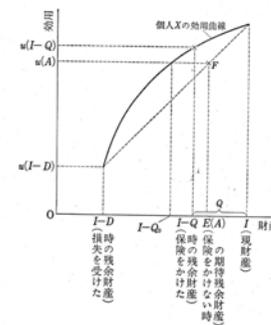
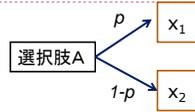
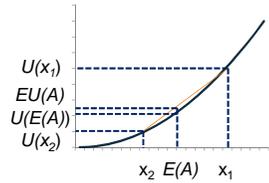


図 1-3 保険を掛けるという行動を説明する上方に凸な効用曲線

▶ 16

リスク選好型の効用関数



$E(A) = px_1 + (1-p)x_2$
 $U(E(A))$: 富の期待値の効用
 $EU(A) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$: 期待効用
 リスク選好型効用関数の場合
 $EU(A) > U(E(A))$

▶ 17

賭けの場合

- ▶ もし賭けの胴元が儲かるなら、賭けをする人は平均的に損をするはずだ。
- ▶ では、賭けをする行動は不合理か？
- ▶ 人はなぜ賭けをすることがあるのか？
- ▶ 1つの解答
 - ▶ 効用関数が下方に凸（危険選好的）
- ▶ では、人は保険に入りつつ賭けをすることはあるのか？
- ▶ どのように説明できるのか？

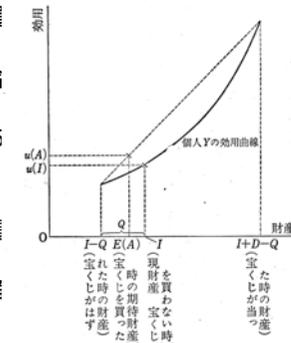


図 1-4 宝くじを買うという行動を説明する下方に凸な効用関数

▶ 18

保険に入りつつ賭けをすることの説明

- ▶ Freidman-Savage の仮説
- ▶ 効用関数が真ん中辺りで危険選好的になっている
- ▶ その他の説明を思いつくか？

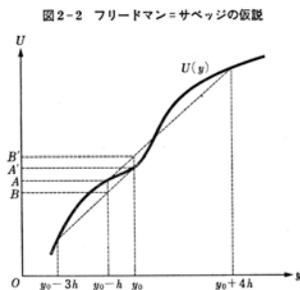


図 2-2 フリードマン=サベッジの仮説

▶ 19

保険に入りつつ賭けをすることの説明 - その2

- ▶ 賭けをすること自体に満足がある。
- ▶ 賭けをすると効用関数が上方に移動する

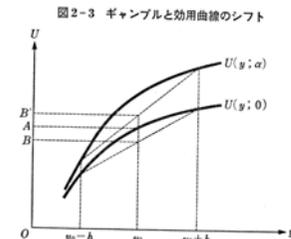


図 2-3 ギャンブルと効用曲線のシフト

▶ 20

効用最大化への反例の指摘 代表：アレ(Allais)の反例

- ▶ 抽選[A,B;p,1-p]
 - ▶ 確率pでAが、確率1-pでBが生じる
- ▶ 問題1：どちらを選ぶか？
 - ▶ L1=[30,0;1,0] vs L2=[40,0;4/5,1/5]
- ▶ 問題2：どちらを選ぶか？
 - ▶ L3=[30,0;1/4,3/4] vs L4=[40,0;1/5,4/5]
- ▶ 問題1でL1、問題2でL4を選ぶ場合
 - ▶ 効用の公理系では、あり得ない
- ▶ 問題：確実性重視効果(certainty effect)
 - ▶ $U(0)=0$ とおけば(正1次変換しても結果は同じ)、
 - ▶ $L_1 \succ L_2$ とすると、 $U(30) \cdot 1 > U(40) \cdot \frac{4}{5}$.
 - ▶ $L_4 \succ L_3$ とすると、 $U(40) \cdot \frac{4}{5} > U(30)$. つまり矛盾する。

▶ 21

プロスペクト理論

- ▶ カーネマン、ツベルスキー
- ▶ 期待効用理論がベース
- ▶ 認知心理学的な取り組み
- ▶ 効用に関する想定

$$u(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{if } x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\beta & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- ▶ 結果の評価は現状を参照点としてなされる(利益と損失)
- ▶ 参照点より上では効用関数は上方に凸
- ▶ 参照点より下では効用関数は下方に凸
- ▶ 損失への忌避が強い

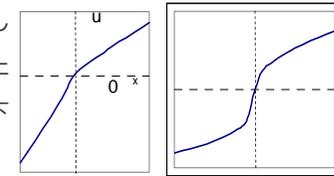
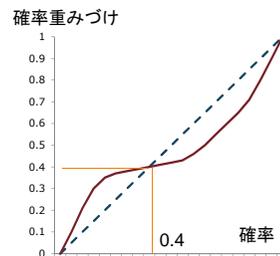


図1: プロスペクト理論が想定する効用関数

▶ 22

- ▶ 確率重みづけへの想定
- ▶ 小さな確率は過大評価、大きな確率は過小評価される
- ▶ $p=w(p)$ となるのは確率0.4くらい



▶ 23

- 今日はおしまい
- 次回までに：テキスト第3章を読んでおくこと



▶ 24