

2012年度 ゲーム理論入門 中間試験 [2012/11/20 (火)] 解答例

以下に解答例を書いておきます。

この解答に不備があると考えた場合は、12月4日までに高木にお伝えください。確認の上善処します。

高木の連絡先: etakagi@mail.saitama-u.ac.jp

問1. 次の(1)～(5)の用語を解説しなさい。(各5点、計25点)

(1) 無差別(indifference)

2つの対象(aとb)間の選好関係を $a \succsim b$ と表すとして、「 $a \succsim b$ かつ $b \succsim a$ 」であるとき、aとbは無差別である。つまり選好の程度が同じであること。(テキスト p.22)

(2) 聖ペテルスブルグのパラドックス

コイン投げをしてn回目ではじめて表が出れば 2^n の金額がもらえるという選択肢の金額期待値が無限大になるにもかかわらず、現実にはこの選択肢が選ばれそうにない、というパラドックス。ベルヌイは効用関数が対数関数であればこのパラドックスは解消されると提案した。(2012.10.16の授業プリントで説明)

(3) リスク選好型

富の期待値が同じでもリスクを含む選択肢を選ぶこと。意思決定者の効用関数が下に凸である(凸関数である)ときに生じる。(テキスト pp.31-34)

(4) クールノー寡占市場

少数の企業が同一の財を市場に供給し、総供給量によって価格が決まるような市場。ゲーム的な状況の典型である。(テキスト pp.52-53)

(5) ベイジアン仮説

不確実な事象に直面する意思決定者が主観的確率にもとづく期待効用を最大にする選択肢を選ぶとする仮説。期待効用仮説を拡張したアイデアである。(テキスト p.35)

問2. ある社会が、人口の等しい3つの集団A、B、Cに分かれていると仮定する。この社会では可能な政策X、Y、Zが提示されている。この3つの政策に対する各集団の成員の選好は一樣であり、つぎのようになっていると仮定する。

Aの成員: $X \succ Y \succ Z$

Bの成員: $Y \succ Z \succ X$

Cの成員: $Z \succ X \succ Y$

この社会において、政策に対する「社会の選好」を次のルールで決めることにしたとしよう。

ルール: 「2つの政策を比較し、社会の多数派の選好を社会の選好とする」

この「社会の選好」が3つの政策(X、Y、Z)への判断において完備性と推移性を満たすかどうかを説明しなさい。(15点)

【解答例】結論からいえば、完備性は満たすが推移性は満たさない。
社会全体の多数決で判断したとき、社会の選好は次のようになる。

XとYの比較：A集団とC集団の支持で $X > Y$

YとZの比較：A集団とB集団の支持で $Y > Z$

ZとXの比較：B集団とC集団の支持で $Z > X$

つまり、完備性は満たされるが推移性は満たされない。

問3．金額 x 万円に対する効用関数を $u(x) = \sqrt{x}$ とする。意思決定者が「確率1/2で収入は64万円になるが、確率1/2で4万円になる」状況にあるとしよう。この意思決定者が「確実に30万円を得る」権利を得るために、いくらまでなら払うと考えられるか、説明しなさい。（15点）

【解答例】

「64万円になる確率が1/2、4万円になる確率が1/2」であるときの期待効用を EU とすると、

$$EU = 1/2 \sqrt{64} + 1/2 \sqrt{4} = 4 + 1 = 5 = \sqrt{25}$$

この状態は確実に25万円を得ることと無差別であるから、30万円を確実に得るために、その意思決定者は5万円（=30-25）まで払う余地がある。

問4．純戦略だけを考えたとき、次の利得行列(1)～(3)のゲームにナッシュ均衡点は存在するか？
(1)～(3)のそれぞれにつき、ナッシュ均衡点が存在するときはそのセルに○をつけ、ないときは利得行列の下に（ ）に「ない」と書きなさい。（各5点、計15点）

		a	b			a	b			a	b		
	a	4	3		a	3	4		a	1	2		
	b	2	1		b	2	1		b	6	2		
		0	2			2	1			-1	0		
		3	0			3	0			8	4		
		(1)				(2)				(3)			

(ない)

()

()

問5．2人のプレイヤーA、Bがパーティーに原色の服を着て行くか中間色の服を着て行くかを判断するとして。自分と相手が異なる色調の服を着て行けば相互に特色が出せて良い結果になる。ただし原色の服を着て行った方が中間色の服を着て行くより目立ち、得をする、として。しかし両者とも同じ色調の服になると、相互に個性を発揮できずに失敗である、として。この状況の利得行列は右のようであると仮定する。

		B	
		原色	中間色
A	原色	0, 0	2, 1
	中間色	1, 2	0, 0

右の利得行列で表されるゲームで、AとBそれぞれの最適応答は何か、および、純戦略と混合戦略を考慮してナッシュ均衡点が何かを説明しなさい。なお、Aが原色を選ぶ確率を x 、Bが原色を選ぶ確率を y において解答すること。(30点)

【解答例】

Aの期待利得を求めると、

原色選択の期待利得 = $0 \cdot y + 2 \cdot (1-y) = 2 \cdot (1-y)$.

中間色選択の期待利得 = $1 \cdot y + 0 \cdot (1-y) = y$.

そこで、原色選択が最適となるのは、 $2 \cdot (1-y) > y$ のとき、つまり $y < 2/3$ のとき。そこで、Aの最適応答 x^* は次のように表せる。

$$x^* = 0 \quad \text{if } y > 2/3$$

$$x^* = \text{なんでもよい} \quad \text{if } y = 2/3$$

$$x^* = 1 \quad \text{if } y < 2/3.$$

同様に、Bの期待利得を求めると、

原色選択の期待利得 = $0 \cdot x + 2 \cdot (1-x) = 2 \cdot (1-x)$.

中間色選択の期待利得 = $1 \cdot x + 0 \cdot (1-x) = x$.

そこで、原色選択が最適となるのは、 $2 \cdot (1-x) > x$ のとき、つまり $x < 2/3$ のとき。そこで、Bの最適応答 y^* は次のように表せる。

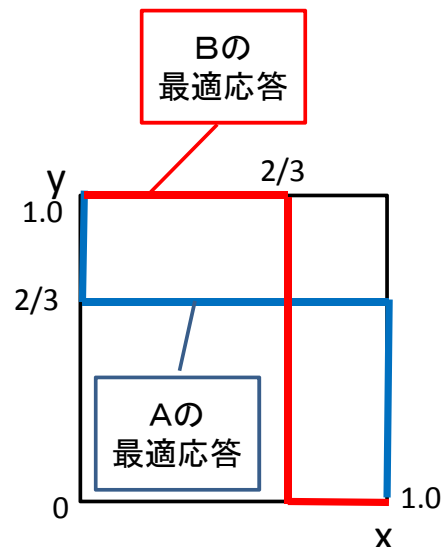
$$y^* = 0 \quad \text{if } x > 2/3$$

$$y^* = \text{なんでもよい} \quad \text{if } x = 2/3$$

$$y^* = 1 \quad \text{if } x < 2/3.$$

AとBの最適応答を図示すると右図のようになる。

このとき、純戦略による2つのナッシュ均衡点 ($x^*=1, y^*=0$)、($x^*=0, y^*=1$) と、1つの混合戦略によるナッシュ均衡点 ($x^*=2/3, y^*=2/3$) があることが分かる。



[以上]